



教育图书



功能学具



学生之家

基础教育行业专研品牌

30⁺年专注教育行业

全品学练考

主编 肖德好

导学案

高中数学6

选择性必修第二册 RJA

北京
专版

数智教辅

索取二维码
贴此处
激活享受服务

— 全品AI学伴 —
7×24小时有问必答
高效预复习，吃透每一课

天津出版传媒集团
天津人民出版社

CONTENTS

目录

导学案

04 第四章 数列

PART FOUR

4.1 数列的概念	109
第1课时 数列的概念与表示	109
第2课时 数列的递推公式与前 n 项和	112
4.2 等差数列	114
4.2.1 等差数列的概念	114
第1课时 等差数列的概念与通项公式	114
第2课时 等差数列的性质与应用	117
4.2.2 等差数列的前 n 项和公式	119
第1课时 等差数列的前 n 项和公式及性质	119
第2课时 等差数列的前 n 项和的最值与应用	122
4.3 等比数列	124
4.3.1 等比数列的概念	124
第1课时 等比数列的概念与通项公式	124
第2课时 等比数列的性质与应用	127
第3课时 等比数列与等差数列的综合应用	130
4.3.2 等比数列的前 n 项和公式	132
第1课时 等比数列的前 n 项和公式	132
第2课时 等比数列的前 n 项和的性质及应用	133
拓展微课(一) 求数列的通项公式常用方法	136
拓展微课(二) 数列求和常用方法	137
4.4* 数学归纳法	139
本章总结提升	142

5.1 导数的概念及其意义	148
5.1.1 变化率问题	148
5.1.2 导数的概念及其几何意义	151
第1课时 导数的概念	151
第2课时 导数的几何意义	153
5.2 导数的运算	156
5.2.1 基本初等函数的导数	156
5.2.2 导数的四则运算法则	158
5.2.3 简单复合函数的导数	160
5.3 导数在研究函数中的应用	163
5.3.1 函数的单调性	163
第1课时 函数的单调性与导数	163
第2课时 利用导数解决函数单调性综合问题	165
5.3.2 函数的极值与最大(小)值	167
第1课时 函数的极值与导数	167
第2课时 函数的最大(小)值与导数	170
第3课时 含参函数的最大(小)值问题	172
第4课时 导数与函数的零点与实际应用	174
拓展微课(三) 三次函数的图象与性质及应用	178
拓展微课(四) 常用不等式	180
④ 本章总结提升	181
◆ 参考答案(单独成册)	187



4.1 数列的概念

第1课时 数列的概念与表示

【学习目标】

- 1. 了解数列的概念,知道什么是数列,能说出数列的项.
- 2. 了解数列的表示方法,会用表格、图象、通项公式表示数列,能用通项公式求任意项或根据数列的前几项写出数列的一个通项公式.
- 3. 了解数列是一种特殊函数,能用函数的观点看待数列,并能说出数列与函数的共性与差异.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 数列及其有关概念

1. 数列

我们把按照确定的_____排列的一列数称为数列.

2. 数列的项

数列中的_____叫作这个数列的项. 数列的第一个位置上的数叫作这个数列的第1项,常用符号_____表示,第二个位置上的数叫作这个数列的第2项,用_____表示……第 n 个位置上的数叫作这个数列的第 n 项,用_____表示. 其中第1项也叫作_____.

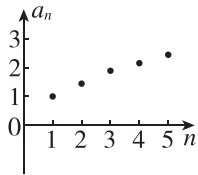
3. 数列的表示

(1)数列的一般形式是 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, 简记为_____.

(2)表格表示,如下表.

n	1	2	3	...
a_n	a_1	a_2	a_3	...

(3)图象表示,如图.



4. 数列的分类

(1)按项的个数分类

类别	含义
有穷数列	项数_____的数列
无穷数列	项数_____的数列

(2)按项的变化趋势分类

类别	含义
递增数列	从第2项起,每一项都_____它的前一项的数列
递减数列	从第2项起,每一项都_____它的前一项的数列
常数列	各项都_____的数列

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1)李萍从6岁到18岁,每年生日那天测量体重,依次排成一列数,可以构成数列. ()
- (2)数列 $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \dots$ 是递减数列且是无穷数列. ()
- (3)数列 $1, 3, 5, 7, 9$ 与数列 $9, 7, 5, 3, 1$ 是同一个数列. ()

◆ 知识点二 数列的通项公式

- 1. 定义:如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与它的序号_____之间的对应关系可以用一个式子来表示,那么这个式子叫作这个数列的_____.
- 2. 作用:①求数列的任意一项;②检验某数是否为该数列中的一项.

3. 数列的通项公式与函数解析式的关系比较

	函数	数列
定义域	$\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{R}$ 的子集	正整数集 $\mathbf{N}^*$ (或它的有限子集 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$)
解析式	$y = f(x)$	$a_n = f(n)$
值域	y 的取值范围	由自变量从小到大依次取值时对应的一系列函数值构成
表示方法	解析法、列表法、图象法	通项公式(解析法)、列表法、图象法

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1) 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = \begin{cases} 3 \times 2^{n-1} (n \text{ 是偶数}), \\ 3n-2 (n \text{ 是奇数}), \end{cases}$ 则 $a_3 > a_4$. ()

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2n-1$, 则数列 $\{a_n\}$ 的图象与函数 $y = 2x-1$ 的图象相同. ()

(3) 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = 2^n + 3$, 则 11 是数列 $\{a_n\}$ 中的项. ()

课中探究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 数列的概念与分类

例 1 已知下列数列: ① $1, 0.84, 0.84^2, 0.84^3$;

② $2, 4, 6, 8, 10, \dots, 2n, \dots$; ③ $7, 7, 7, 7, \dots$; ④ $\frac{1}{3},$

$\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \dots, \frac{1}{3^n}, \dots$; ⑤ $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$;

⑥ $0, -1, 2, -3, 4, -5, \dots$.

其中, 有穷数列是 _____, 无穷数列是 _____, 递增数列是 _____, 递减数列是 _____, 常数列是 _____. (填序号)

【素养小结】

判断数列的类型应注意的几个方面: (1) 判断一个数列是有穷数列还是无穷数列的关键是判断数列的项数是有限的还是无限的; (2) 判断一个数列的单调性一般是根据数列中的 a_{n+1} 与 a_n 的大小来判断, 即①若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n < a_{n+1}$, 则是递增数列, ②若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n > a_{n+1}$, 则是递减数列.

◆ 探究点二 数列的表示

角度 1 已知通项公式写数列的项

例 2 根据下列数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, 写出数列的前 5 项, 并画出它们的图象.

(1) $a_n = \frac{1}{2}n - 1$;

(2) $a_n = \sin \frac{(n+2)\pi}{2}$.

【素养小结】

数列 $\{a_n\}$ 的通项公式给出了第 n 项 a_n 与它的位置序号 n 之间的关系, 只要用序号代替公式中的 n , 就可以求出数列中相应的项.

角度 2 已知数列的项写通项公式

例 3 根据下列数列的前 4 项, 写出数列的一个通项公式.

(1) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, \dots$;

(2) $\frac{1}{1 \times 2}, -\frac{1}{2 \times 3}, \frac{1}{3 \times 4}, -\frac{1}{4 \times 5}, \dots$;

(3) $-1, \frac{8}{5}, -\frac{15}{7}, \frac{24}{9}, \dots$.

变式 根据下列数列的前几项,写出数列的一个通项公式.

(1) $9, 99, 999, 9999, \dots$;

(2) $\sqrt{3}, 3, \sqrt{15}, \sqrt{21}, \dots$;

(3) $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{10}{7}, \frac{15}{9}, \frac{26}{11}, \dots$.

[素养小结]

根据数列的前几项猜想数列的通项公式,若所给前几项为分数,则可分别观察分子组成的数列特征与分母组成的数列特征.若所给前几项为正负相间的项,则可用 -1 的幂进行符号调节.当猜想的难度较大,不易猜出时,可尝试以下方法将数列转化为易于猜想的数列:对数列的各项同时进行加、减、乘、除同一数;对数列各项分别加、减、乘、除该项的项数;将各项分解为若干项的和、差、积、商等形式.如猜想 $2, 5, 9, 17$ 的通项公式,可采取各项减 1 变化为 $1, 4, 8, 16$.

◆ 探究点三 数列通项公式的简单应用

例 4 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 3n^2 - 28n$.

(1) 写出数列 $\{a_n\}$ 的第4项和第6项.

(2) -49 和 68 是否为该数列的项?

(3) 数列 $\{a_n\}$ 中有多少个负数项?

变式 (1) 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{1}{n(n+2)}$,则 $a_{10} =$ _____ ;若 $a_m = \frac{1}{168}$,则 $m =$ _____.

(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = n^2 + 2n$,若第 $2m$ 项是第 m 项的3倍,则 $m =$ _____.

[素养小结]

判断某个数是否为数列中的项,需先假设它是数列中的项,然后列方程求解.若方程有正整数解,则该数是数列中的项;若方程无解或解均不是正整数,则该数不是数列中的项.

拓展 (1) 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{n-2}{2n-7}$,则 $\{a_n\}$ 中的最大项为 ()

- A. $\frac{1}{5}$ B. 0 C. -1 D. 2

(2) 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = -2n^2 + \lambda n$ ($n \in \mathbf{N}^*, \lambda \in \mathbf{R}$),若 $\{a_n\}$ 是递减数列,则 λ 的取值范围是 ()

- A. $(-\infty, 4)$ B. $(-\infty, 4]$
C. $(-\infty, 6)$ D. $(-\infty, 6]$

课堂评价

知识评价 素养形成

1. [2025·北京北师大附中测试] 数列 $1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{16}$ 的一个通项公式是 ()

- A. $\frac{n+1}{2^n}$ B. $\frac{n+3}{2^{n+1}}$
C. $\frac{n+1}{2n}$ D. $\frac{n+3}{4n}$

2. 已知数列 $1, 2, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{13}, \dots$,则 $\sqrt{22}$ 是这个数列的 ()

- A. 第8项 B. 第7项
C. 第6项 D. 第5项

3. 大衍数列来源于《乾坤谱》中对易传“大衍之数五十”的推论,主要用于解释中国传统文化中的太极衍生原理.该数列从第一项起依次是 $0, 2, 4, 8, 12, 18, 24, 32, 40, 50, \dots$,则该数列的第18项为 ()

- A. 200 B. 162 C. 144 D. 128

4. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \begin{cases} n+2, & n \text{ 是奇数,} \\ n-3, & n \text{ 是偶数,} \end{cases}$
则 $a_3 + a_6 =$ _____.

5. 已知下列数列:

(1) $0, 0, 0, 0, 0, 0$; (2) $0, -1, 2, -3, 4, -5, \dots$;

(3) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots$;

(4) $1, 0.2, 0.2^2, 0.2^3, \dots$;

(5) $0, -1, 0, \dots, \cos \frac{n}{2}\pi, \dots$.

其中有穷数列是 _____, 无穷数列是 _____,
递增数列是 _____, 递减数列是 _____, 常数
列是 _____, 摆动数列是 _____.(填序号)

第2课时 数列的递推公式与前 n 项和

【学习目标】

1. 会用递推公式表示数列, 能根据数列的递推公式写出数列的前几项.
2. 了解数列的前 n 项和, 并能利用 S_n 与 a_n 的关系解决一些简单问题.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 数列的递推公式

概念: 如果一个数列的相邻两项或多项之间的关系可以用一个式子来表示, 那么这个式子叫作这个数列的 _____.

作用: 知道了首项或前几项, 以及递推公式, 就能求出数列的每一项.

【诊断分析】1. 判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1) 所有的数列都有递推公式. ()

(2) 数列的递推公式是关于 n 的函数关系式. ()

(3) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n - 2$, 则 $a_2 = 4$. ()

2. 仅由数列 $\{a_n\}$ 的递推公式 $a_n = 3a_{n-1} (n \geq 2, n \in \mathbb{N}^*)$ 能否确定这个数列? 若再已知 $a_2 = 3$ 呢?

2. 数列的前 n 项和公式

如果数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 与它的序号 n 之间的对应关系可以用一个 _____ 来表示, 那么这个 _____ 叫作这个数列的前 n 项和公式.

3. 数列 $\{a_n\}$ 的通项公式与前 n 项和 S_n 的关系

在数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 为其前 n 项和, 显然 $S_1 = a_1$, 而在数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 为其前 n 项和, 显然 $S_1 = a_1$, 而 $S_{n-1} = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} (n \geq 2)$, 于是 $a_n =$
 $\begin{cases} \text{_____,} & n=1, \\ \text{_____,} & n \geq 2. \end{cases}$

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 3n + 1$, 则 $a_1 = 4, a_4 = 3$. ()

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = n^2 + 1$, 则 $a_n = 2n - 1$. ()

(3) 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = S_6 - S_2$. ()

课 中 探 究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 递推公式

例 1 (1) 如图所示, 实心点的个数依次为 5, 9, 14, 20, ..., 记此数列为 $\{a_n\}$, 则 ()



A. $a_{n+1} + a_n = n + 2$

B. $a_{n+1} - a_n = n + 2$

C. $a_{n+1} + a_n = n + 3$

D. $a_{n+1} - a_n = n + 3$

◆ 知识点二 数列的前 n 项和

1. 概念及表示

我们把数列 $\{a_n\}$ 从第 1 项起到第 n 项止的各项之和, 称为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 记作 S_n , 即 $S_n =$ _____.

(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1, a_{n+1}=\frac{2a_n}{2+a_n}$, 写出它的前 5 项, 并归纳出数列 $\{a_n\}$ 的一个通项公式.

变式 (1) 数列 1, 3, 7, 15, 31, 63, ... 满足的递推公式为 ()

- A. $a_{n+1}=a_n+2$ B. $a_{n+1}=2a_n+1$
C. $a_{n+1}=3a_n$ D. $a_{n+1}=a_n+2^{n-1}$

(2) 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1, 4a_{n+1}-a_na_{n+1}+2a_n=9$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

- ① 写出数列 $\{a_n\}$ 的前 4 项;
② 请直接写出 $\{a_n\}$ 的一个通项公式.

[素养小结]

(1) 递推公式的作用: 已知数列的某一项, 利用递推公式可以写出数列的每一项. 对于具有周期性的数列, 一般利用递推公式写出几项就能发现其周期变化规律.
(2) 递推公式与通项公式的区别: 递推公式揭示了数列的相邻项之间的关系, 已知前面的项可以递推出后面的项; 通项公式揭示了项与其序号之间的关系, 把序号代入通项公式可以直接求出该项.

(3) 某些用递推公式给出的数列, 写出数列的前几项后, 由前几项分析其特点、规律, 即可归纳总结出数列的一个通项公式.

(4) 形如 $a_{n+1}-a_n=f(n)$ 或 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$ 的递推公式, 可以利用累加法或累乘法求出通项公式.

◆ 探究点二 数列的前 n 项和

例 2 (1) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n=2^n$, 则 $a_4+a_5=$ ()

- A. 48 B. 32 C. 24 D. 8

(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项和 $S_3=$ _____.

变式 (1) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=n^2+n$, 则 $a_7=$ ()

- A. 11 B. 12 C. 13 D. 14

(2) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n=an^2$, 若 $S_{10}=600$, 则 $a_3-a_5-a_6=$ _____.

[素养小结]

对于已知数列的前 n 项和公式求数列的某一项问题, 主要利用定义解决.

◆ 探究点三 利用数列的前 n 项和公式求通项公式

例 3 下面给出了数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n , 求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(1) $S_n=2n^2-3n$;

(2) $S_n=4-\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

变式 (1)[2026·北京牛栏山一中测试] 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=n^2-3n(n\in\mathbf{N}^*)$,若 $p-q=2026$, p,q 为正整数,则 $a_p-a_q=$ ()

- A. 4052 B. 2026
C. -2026 D. -4052

(2)若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=-n^2+14$,则 $\{a_n\}$ 的通项公式为_____.

[素养小结]

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 求通项公式时,一般先根据 $a_1=S_1$ 求出 a_1 ,再根据 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geq 2)$ 计算出当 $n\geq 2$ 时的通项公式,然后验证 a_1 是否满足上式,由此决定数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是否需要分段书写.

课堂评价

知识评价 素养形成

1. [2024·北京北师大附中测试] 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=a_n+2$,且 $a_1=2$,那么 $a_3=$ ()
A. 4 B. 5
C. 6 D. 8

2. [2025·北京八中测试] 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=1-\frac{1}{a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$,且 $a_1=2$,则 $a_{2026}=$ ()

- A. -1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{3}{2}$ D. 2

3. [2025·房山期中] 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=n^2+1$,则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 ()

- A. $a_n=2n-1$
B. $a_n=2n$
C. $a_n=2n+1$
D. $a_n=\begin{cases} 2, n=1, \\ 2n-1, n\geq 2 \end{cases}$

4. [2024·北京二零一中测试] 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n+1}, n\in\mathbf{N}^*$,若 $a_3=\frac{1}{7}$,则 $a_1=$ _____.

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,若 $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+1$,则 $S_5=$ _____.

4.2 等差数列

4.2.1 等差数列的概念

第1课时 等差数列的概念与通项公式

【学习目标】

1. 理解等差数列的概念,能用文字语言、符号语言、图形语言描述等差数列的概念,能根据等差数列的定义判断或证明已知数列是否是等差数列.
2. 理解等差数列的通项公式的意义,能根据定义归纳出等差数列的通项公式,会用通项公式解决一些简单问题.

课前预习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 等差数列的有关概念与表示

1. 等差数列与公差:如果一个数列从第2项起,每一项与它的前一项的差都等于同一个常数,那么这个数列就叫作_____数列,这个常数叫作等差数列的_____,公差通常用字母 d 表示. 以上定义用符号表示为_____(d 为常数, $n\in\mathbf{N}^*$). 等差数列的定义用符号语言表示,其本质是等差数列的递推公式.

2. 等差中项:由三个数 a, A, b 组成的等差数列可以看成是最简单的等差数列,这时, A 叫作 a 与 b 的_____,并且 $2A=a+b$.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1)若一个无穷数列 $\{a_n\}$ 的前4项分别是1,2,3,4,则它一定是等差数列. ()
- (2)若一个数列从第2项起每一项与它前一项的差都是常数,则这个数列一定是等差数列. ()
- (3)任意两个实数都存在等差中项. ()

(2) 已知 $2m$ 和 n 的等差中项是 5, m 和 $2n$ 的等差中项是 4, 则 m 和 n 的等差中项是_____.

变式 (1) 一个等差数列的前 4 项是 $1, x, a, 2x$, 则 $x = \underline{\hspace{2cm}}, a = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 方程 $x^2 + 4x + 1 = 0$ 的两根的等差中项为 ()

- A. 4 B. -4
C. 2 D. -2

[素养小结]

三个数 a, b, c 成等差数列的充要条件是 $b = \frac{a+c}{2}$ (或 $2b = a+c$), 利用该结论可进行等差数列的判定或解有关等差中项的计算问题. 若需证明 $\{a_n\}$ 为等差数列, 则可通过证明 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) 来实现.

◆ 探究点三 等差数列的通项公式及应用

角度 1 等差数列的基本量运算

例 3 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

- (1) 若 $a_1 = 2, d = 3$, 求 a_{10} ;
(2) 若 $a_1 = 3, a_n = 21, d = 2$, 求 n ;
(3) 若 $a_1 = 12, a_6 = 27$, 求 d ;
(4) 若 $d = -\frac{1}{3}, a_7 = 8$, 求 a_1 和 a_n .

变式 (1) [2025·顺义期末] 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 3, a_4 = 6$, 则 $a_{10} = \underline{\hspace{2cm}}$ ()

- A. 8 B. 10 C. 12 D. 14

(2) 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_5 = 11, a_1 + a_2 + a_3 = 15$, 则 $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

[素养小结]

等差数列通项公式的求法与应用技巧

(1) 等差数列的通项公式可由首项与公差确定, 所以要求等差数列的通项公式, 只需求出首项与公差.

(2) 等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 中共含有四个参数, 即 a_1, d, n, a_n , 如果知道了其中的任意三个数, 那么就可以由通项公式求出第四个数, 这一求未知量的过程, 我们通常称之为“知三求一”.

角度 2 等差数列的函数特征

例 4 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d > 0$, 给出下列说法:

- ① 数列 $\{a_n\}$ 是递增数列;
② 数列 $\{na_n\}$ 是递增数列;
③ 数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是递减数列;
④ 数列 $\{a_n + 3nd\}$ 是递增数列.

以上说法中正确的是_____ (填序号)

变式 (1) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 为递增数列, 若 $a_1 = \frac{1}{25}$, 且从第 10 项开始每项都大于 1, 则此等差数列的公差 d 的取值范围是_____.

(2) 写出一个同时满足下列条件的数列 $\{a_n\}$ 的通项公式: $a_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

- ① 数列 $\{a_n\}$ 是无穷等差数列;
② 数列 $\{a_n\}$ 为递减数列;
③ 数列 $\{|a_n|\}$ 的最小项为第 5 项.

课堂评价

知识评价 素养形成

1. [2025·房山期末] 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = -2n + 1$, 则数列 $\{a_n\}$ 的公差为 ()

- A. -2 B. 2
C. -3 D. 3

2. [2025·房山期末] 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = a_n - 2$, 且 $a_1 = 8$, 则 a_3 的值是 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

3. [2025·北京牛栏山一中测试] 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 = 2, a_7 = 1$, 若 $\frac{1}{a_7+1}$ 为 $\frac{1}{a_3+1}$ 和 $\frac{1}{a_{11}+1}$ 的等差中项, 则 $a_{11} = \underline{\hspace{2cm}}$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. 1 D. 2

4. [2025·北京人大附中测试] 若等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{2023} + a_{2024} = 1, a_{2023} - a_{2025} = 6$, 则 $a_{2023} + a_{2026} =$ ()
- A. 5 B. 7
- C. -5 D. -7

5. [2024·顺义期末] 从冬至起,依次是小寒、大寒、立春、雨水、惊蛰、春分、清明、谷雨、立夏、小满、芒种共十二个节气,立竿测影,得其最短日影长依次成等差数列.若冬至、立春、春分最短日影长之和为31.5尺,春分最短日影长为7.5尺,则这十二个节气中后六个(春分至芒种)最短日影长之和为_____尺.

第2课时 等差数列的性质与应用

【学习目标】

1. 理解等差数列的通项公式,能说出等差数列通项公式的特征,并能灵活求解等差数列的基本量.
2. 能得出等差数列的一些性质,并利用其解决一些简单问题.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 等差数列通项公式的推广与运算性质

两项关系	多项关系(性质)
通项公式的推广: $a_n = a_m + \underline{\hspace{2cm}}$ (d 为公差, $m, n \in \mathbf{N}^*$)	项的运算性质:若 $m+n=p+q$ ($m, n, p, q \in \mathbf{N}^*$), 则 $a_m + a_n = a_p + a_q$. 简记:若下标和相等,则对应项的和相等. 特别地,若 $m+n=2k$ ($m, n, k \in \mathbf{N}^*$), 则 $a_m + a_n = 2a_k$

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1)在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots$. ()
- (2)在等差数列 $\{a_n\}$ 中, a_k 为 a_{k-m}, a_{k+m} ($m < k, m, k \in \mathbf{N}^*$) 的等差中项. ()
- (3)在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 + a_4 = a_6$. ()
- (4)在等差数列 $\{a_n\}$ 中,若 $a_4 + a_8 + a_{12} = 120$, 则 $a_8 = 40$. ()

◆ 知识点二 由等差数列构造新数列

1. 构造新数列的基本类型

- (1)若 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列,则 $\{c+a_n\}$ (c 为任意常数)是公差为_____的等差数列;
- (2)若 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列,则 $\{c \cdot a_n\}$ (c 为任意常数)是公差为_____的等差数列;
- (3)若 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 分别是公差为 d_1, d_2 的等差数列,且它们的项数相同,则数列 $\{pa_n + qb_n\}$ (p, q 是常数)是公差为 $pd_1 + qd_2$ 的等差数列.

2. 等差数列部分项的性质

若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列,则 $a_m, a_{m+k}, a_{m+2k}, a_{m+3k}, \dots$ ($m, k \in \mathbf{N}^*$) 仍为等差数列.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

- (1)已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,取其奇数项组成一个新数列,则此数列是公差为 $2d$ 的等差数列. ()
- (2)若等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,则数列 $\{a_n+3\}$ 的公差为 $d+3$. ()
- (3)若 $\{a_n\}$ 是等差数列,则数列 $\{2a_n\}$ 也是等差数列. ()
- (4)若数列 $a_1, a_3, a_5, \dots$ 和 $a_2, a_4, a_6, \dots$ 都是公差为 d 的等差数列,则 $a_1, a_2, a_3, \dots$ 也是等差数列. ()

课 中 探 究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 等差数列性质的应用

例1 (1)在等差数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_3 + a_9 = 12, a_2 = 4$, 则 $a_{10} =$ ()

- A. 4 B. 8
- C. 3 D. 6

(2)在等差数列 $\{a_n\}$ 中,若 $a_3 + a_6 + a_{20} + a_{23} = 36$, 则 $a_{13} =$ _____.

变式 (1)已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列,且满足 $a_3 + a_{11} = 30$, 则 $a_6 + a_7 + a_8 =$ ()

- A. 45 B. 60
- C. 75 D. 90

(2) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{m-1} + a_{m+1} - a_m^2 - 1 = 0$, 且 $m > 1$, 则 $a_1 + a_{2m-1} =$ _____.

(3) 若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, $a_p = q, a_q = p$ ($p \neq q$), 则 $a_{p+q} =$ _____.

[素养小结]

(1) 灵活利用等差数列的性质, 可以减少运算. 令 $m = 1, a_n = a_m + (n - m)d$ 即变为 $a_n = a_1 + (n - 1)d$, 可以减少记忆负担.

(2) 等差数列运算的两种常用思路

① 基本量法: 根据已知条件, 列出关于 a_1, d 的方程(组), 确定 a_1, d , 然后求其他量.

② 巧用性质法: 观察等差数列中项的序号, 若满足 $m + n = p + q = 2r$ ($m, n, p, q, r \in \mathbb{N}^*$), 则 $a_m + a_n = a_p + a_q = 2a_r$.

◆ 探究点二 由等差数列构造新数列

例 2 (1) 已知数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 都是等差数列, 且 $a_1 = 25, b_1 = 75, a_2 + b_2 = 100$, 那么数列 $\{a_n + b_n\}$ 的第 37 项为 _____.

(2) 已知等差数列 $-2, 1, 4, 7, 10, \dots$, 现在其每相邻两项之间插入一个数, 使之成为一个新的等差数列 $\{a_n\}$, 求新数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

变式 在无穷等差数列 $\{a_n\}$ 中, 首项 $a_1 = 3$, 公差 $d = -5$, 依次取出序号被 4 除余 3 的项组成数列 $\{b_n\}$.

(1) 求 b_1 和 b_2 .

(2) 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(3) 数列 $\{b_n\}$ 中的第 506 项是 $\{a_n\}$ 中的第几项?

[素养小结]

对于任何形式的构造数列, 判断其是否为等差数列, 一般从两个方面进行: (1) 定义, 即 $a_n - a_{n-1}$ ($n \geq 2$) 是否为常数; (2) 通项公式是否为关于 n 的一次函数.

◆ 探究点三 等差数列的实际应用

例 3 [2024 · 东城期末] 哈雷彗星大约每 76 年环绕太阳一周, 因英国天文学家哈雷首先测定其轨道数据并成功预言回归时间而得名. 已知哈雷是 1682 年观测到这颗彗星的, 则人们最有可能观测到这颗彗星的时间为 ()

- A. 2041 年~2042 年
- B. 2061 年~2062 年
- C. 2081 年~2082 年
- D. 2101 年~2102 年

变式 某公司经销一种数码产品, 第 1 年可获利 200 万元. 从第 2 年起, 由于市场竞争等方面的原因, 其利润每年比上一年减少 20 万元, 按照这一规律, 如果公司不开发新产品, 也不调整经营策略, 从第几年起, 该公司经销这一产品将亏损?

[素养小结]

求解等差数列实际应用问题的关键是认真审题,挖掘出“等差”变化的含义,进一步明确首项、公差、项数等基本量.

课堂评价

知识评价 素养形成

1. [2025·房山期中] 我国古代数学名著《九章算术》第六章“均输”中有这样一个问题:“今有五人分五钱,令上二人所得与下三人等.问各得几何?”意思是:五个人分五钱(“钱”是古代的一种计量单位),每人所得依次相差一样多,前两人所得钱数与后三人所得钱数一样多,问每个人分得多少钱.在这个问题中,分得最少的一人得到 ()

- A. $\frac{1}{3}$ 钱 B. $\frac{2}{3}$ 钱
C. $\frac{5}{6}$ 钱 D. 1 钱

2. 已知数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 为等差数列,且公差分别为 $d_1=2, d_2=1$, 则数列 $\{2a_n-3b_n\}$ 的公差为 ()

- A. 7 B. 5 C. 3 D. 1

3. [2026·北京理工附中测试] 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_4+a_5+a_6=15$, 则 $a_2+a_8=$ _____.

4. [2025·北京育才学校测试] 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, $a_2+a_8=8$, 则 $a_1+a_9=$ _____.

5. 两个等差数列 $2, 5, 8, \dots$ 与 $2, 7, 12, \dots$ 的公共项构成的等差数列 $\{c_n\}$ 的通项公式是 _____.

4.2.2 等差数列的前 n 项和公式

第1课时 等差数列的前 n 项和公式及性质

【学习目标】

1. 能说明等差数列前 n 项和公式的特征,能灵活运用求和公式解决一些简单问题.
2. 理解并应用等差数列前 n 项和的性质.
3. 会计算含绝对值的前 n 项和.

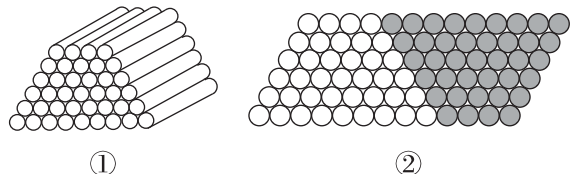
课前预习

知识导学 素养初识

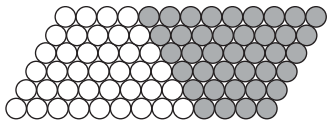
◆ 知识点一 倒序相加法

如果一个数列 $\{a_n\}$ 中,与首末项等“距离”的两项之和等于首末两项之和,那么求和时可采用把正着写与倒着写的两个和式相加,这样就得到了一个常数列的和,进而求得数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,这一求和方法称为 _____.

【诊断分析】如图①所示,某仓库堆放了一堆钢管,最上面的一层有4根钢管,下面的每一层都比上一层多1根,最下面的一层有9根,共有6层.



①



②

(1)假设在这堆钢管旁边倒放上同样的一堆钢管,其截面如图②所示,则这样共有 _____ 根钢管.

(2)原来有 _____ 根钢管.

◆ 知识点二 等差数列的前 n 项和公式

1. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式

已知量	首项、末项与项数	首项、公差与项数
求和公式	$S_n =$ _____	$S_n =$ _____

2. 两个公式的关系:把 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 代入 $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$, 就可以得到 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 则当 $n \geq 2$ 时, 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 $n-1$ 项的和 $S_{n-1} = (n-1)a_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{2}d$. ()

(2)等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式是关于整数 n 的二次函数. ()

(3)等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和公式的常数项为0.

()

(4)设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,则 S_n 与 a_n 不可能相等.

()

◆ 知识点三 等差数列的前 n 项和的性质

1. 若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, S_n 是其前 n 项和, $k \in \mathbf{N}^*$,那么_____,_____,_____成等差数列,如图所示.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & S_{3k} & & \\ \overbrace{a_1+a_2+\cdots+a_k}^{S_k} & + & \overbrace{a_{k+1}+a_{k+2}+\cdots+a_{2k}}^{S_{2k}-S_k} & + & \overbrace{a_{2k+1}+a_{2k+2}+\cdots+a_{3k}}^{S_{3k}-S_{2k}} & & \end{array}$$

2. 若 S_n, T_n 分别为等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和,则 $\frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}} = \frac{a_n}{b_n}$.

3. 若数列 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列,则数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 也是等差数列,且公差为 $\frac{d}{2}$.

4. 设数列 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, $S_{\text{奇}}$ 是前 n 项中奇数项的和, $S_{\text{偶}}$ 是前 n 项中偶数项的和,则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = S_{\text{奇}} + S_{\text{偶}}$.当等差数列的项数 n 为奇数时,中间一项记为 $a_{\text{中}}$.有如下性质:

(1)当 n 为偶数时, $S_{\text{偶}} - S_{\text{奇}} =$ _____;

(2)当 n 为奇数时, $S_{\text{奇}} - S_{\text{偶}} =$ _____, $S_{\text{奇}} =$ _____, $S_{\text{偶}} =$ _____, $\frac{S_{\text{奇}}}{S_{\text{偶}}} =$ _____.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)若 $\{a_n\}$ 是等差数列,则 $a_1+a_2+a_3, a_4+a_5+a_6, a_7+a_8+a_9$ 也是等差数列.

()

(2)若等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,则 S_4, S_8, S_{12} 成等差数列.

()

(3)等差数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n, T_n ,若 $\frac{S_n}{T_n} = \frac{2n}{3n+1}$,则 $\frac{a_{11}}{b_{11}} = \frac{21}{32}$.

()

课中探究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 等差数列的前 n 项和的基本运算

例1 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,公差为 d .

(1)若 $S_8=48, S_{12}=168$,求 a_1 和 d ;

(2)若 $a_6=10, S_5=5$,求 a_8 和 S_8 .

变式 (1)已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,若 $S_9=1$,则 $a_3+a_7=$

()

- A. -2 B. $\frac{7}{3}$
C. 1 D. $\frac{2}{9}$

(2)已知 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,若 $a_4 - a_2 = 12$,则 $2S_6 - 3S_4 =$

()

- A. 24 B. 36
C. 48 D. 72

【素养小结】

等差数列前 n 项和的基本计算

(1)利用基本量求值.

等差数列的通项公式和前 n 项和公式中有五个量 a_1, d, n, a_n 和 S_n ,这五个量可以“知三求二”.一般是利用公式列出基本量 a_1 和 d 的方程组,解出 a_1 和 d ,便可解决问题.解题时注意整体代换的思想.

(2)结合等差数列的性质解题.

等差数列的常用性质:若 $m+n=p+q$ ($m, n, p, q \in \mathbf{N}^*$),则 $a_m+a_n=a_p+a_q$.特别地,若 $m+n=2p$,则 $2a_p=a_m+a_n$,常与求和公式 $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$ 结合使用.

◆ 探究点二 数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和

例 2 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $a_3=98, a_6=86$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和.

变式 在数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1=-20, a_{n+1}=a_n+4$, 求 $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{20}|$.

◆ 探究点三 等差数列的前 n 项和的性质

例 3 (1) 已知 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若

$$\frac{S_m}{m}-S_1=1(m \geqslant 2, \text{ 且 } m \in \mathbf{N}^*), \text{ 则 } \frac{S_{2m-1}}{2m-1}-S_1=$$

()

A. 1 B. 2 C. -1 D. -2

(2) 已知一个等差数列的前 12 项和为 354, 前 12 项中偶数项之和与奇数项之和的比为 32:27, 求该数列的公差 d .

(3) 设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $\frac{S_6}{S_3}=4$, 求 $\frac{S_9}{S_6}$.

变式 (1) 已知 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均为等差数列, 其前 n 项和

分别为 S_n, T_n , 且 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n+2}{n+3}$, 则 $\frac{a_5}{b_5}=\underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 已知 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_3=3, S_6=24$, 则 $S_{12}=\underline{\hspace{2cm}}$.

[素养小结]

(1) 涉及一个有限的等差数列的奇数项和与偶数项和之比的问题, 宜用等差数列前 n 项和的性质求解.

(2) 涉及两个等差数列有限项和之比的问题, 通常是将其转化为两个等差数列前 n 项和之比来处理.

(3) 涉及等差数列中与 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 有关的问题, 可利用 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列解决.

课堂评价

知识评价 素养形成

1. [2026·北京北师大附中测试] 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_4=7, S_5=25$, 则 $a_1=\underline{\hspace{2cm}}$ ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 5

2. [2025·房山期末] 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_2+a_7=9$, 则该数列前 8 项和 S_8 的值为 ()

A. 18 B. 36 C. 54 D. 72

3. [2025·昌平期末] 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, S_n 为其前 n 项和. 若 10 为 a_3 与 a_8 的等差中项, 则 $S_{10}=\underline{\hspace{2cm}}$.

4. 已知 S_n, T_n 分别是等差数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 的前 n 项和, 且 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n+1}{4n-2}(n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $\frac{a_{10}}{b_3+b_{18}}+\frac{a_{11}}{b_6+b_{15}}=\underline{\hspace{2cm}}$.

5. 记 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 已知 $a_5=S_3, a_2-a_1=2$.

(1) 求等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求使 $S_n > 2a_n - 1$ 成立的 n 的最小值.

第2课时 等差数列的前 n 项和的最值与应用

【学习目标】

1. 理解等差数列前 n 项和的性质.
2. 会求等差数列前 n 项和的最值.
3. 能在具体的问题情境中,发现数列的等差关系,抽象出等差数列模型,并应用该模型解决相关问题.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点 等差数列的前 n 项和的最值

1. 从二次函数的角度理解等差数列的前 n 项和公式 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$ 可化成关于 n 的表达式: $S_n =$ _____. 当 $d \neq 0$ 时, S_n 关于 n 的表达式是一个常数项为零的二次表达式,即点 (n, S_n) 在其相应的 _____ 函数的图象上,这就是说等差数列的前 n 项和公式是关于 n 的二次函数,它的图象是抛物线 $y = \frac{d}{2}x^2 + (a_1 - \frac{d}{2})x$ 上横坐标为正整数的一群孤立的点.

2. 等差数列前 n 项和的最值

(1) 利用邻项变号法:

当 $a_1 > 0, d < 0$ 时, S_n 有 _____ 值,使 S_n 取到最值的 n 可由不等式组 _____ 确定;

当 $a_1 < 0, d > 0$ 时, S_n 有 _____ 值,使 S_n 取到最值的 n 可由不等式组 _____ 确定.

(2) 利用二次函数的最值:

$S_n = \frac{d}{2}n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n, n \in \mathbf{N}^*$, 若 $d \neq 0$, 则从二次函数的角度看: 当 $d > 0$ 时, S_n 有 _____ 值; 当 $d < 0$ 时, S_n 有 _____ 值. 当 n 取最接近对称轴的正整数时, S_n 取到最值.

【诊断分析】 判断正误. (请在括号中打“√”或“×”)

(1) 若等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_7 + a_8 + a_9 > 0, a_7 + a_{10} < 0$, 则当 $n=7$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和最大. ()

(2) 若 $a_1 > 0, d < 0$, 则等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 有最大值, 且最大值就是所有正项之和, 也是所有非负项之和. ()

(3) 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 = 32, a_{n+1} = a_n - 4$, 则前 n 项和 S_n 取得最大值时 n 的值有两个. ()

课 中 探 究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 等差数列的前 n 项和的最值

例 1 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_1 = 25, S_{17} = S_9$, 求 S_n 的最大值.

变式 (1) [2025 · 北京三十五中测试] 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_2 = -3, S_4 = -10$, 则 $a_5 =$ _____, S_n 的最小值为 _____.

(2) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, a_6 = -600$, 当且仅当 $n=30$ 时 S_n 取得最小值, 则 $\{a_n\}$ 的公差 d 的取值范围为 _____.

[素养小结]

求等差数列前 n 项和最值的常用思路:

(1) 利用等差数列的增减性, 求出其正、负转折项, 便可求得前 n 项和的最值;

(2) 利用性质求出其正、负转折项, 便可求得前 n 项和的最值;

(3) 利用等差数列的前 n 项和 $S_n = An^2 + Bn$ (A, B 为常数, 且 $A \neq 0$) 为关于 n 的二次函数, 结合二次函数的性质求最值.

◆ 探究点二 等差数列前 n 项和的实际应用

例 2 为鼓励应届毕业大学生自主创业,国家对应届毕业大学生创业贷款有贴息优惠政策.现有应届毕业大学生甲贷款开小型超市,初期投入为 72 万元,经营后每年的总收入为 50 万元,并且第 n 年的超市维护和工人工资等费用为 a_n 万元,其中 $\{a_n\}$ 是首项为 12,公差为 4 的等差数列.

(1)该超市第几年开始盈利?

(2)该超市经营多少年时年平均盈利最大?最大是多少?

(2)中国载人航天工程发射的第十八艘载人飞船,简称“神十八”,于 2024 年 4 月执行载人航天飞行任务.某运载火箭在点火后第一秒钟通过的路程为 2 km,以后每秒钟通过的路程都增加 3 km,在达到离地面 222 km 的高度时,火箭开始进入转弯程序,则从点火到进入转弯程序大约需要的时间是 ()

- A. 10 s B. 11 s
C. 12 s D. 13 s

[素养小结]

(1)解决与等差数列前 n 项和有关的应用题的关键是构造合适的等差数列.

(2)遇到与正整数有关的应用题时,可以考虑与数列知识联系,抽象出数列的模型,并用有关知识解决相关的问题,是数学建模的核心素养的体现.

课堂评价

知识评价 素养形成

1. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,若 $a_1 > 0$, $3a_8 = 5a_{13}$,则 S_n 中最大的是 ()

- A. S_{21} B. S_{20}
C. S_{19} D. S_{18}

2. [2026 · 北京五中测试] 设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,且 $a_{15} > 0$, $a_{11} + a_{20} < 0$,若 $S_k < 0 (k \in \mathbf{N}^*)$,则 k 的最小值为 ()

- A. 28 B. 29
C. 30 D. 31

3. [2026 · 朝阳期末] 某图书馆为丰富馆藏图书资源,制定如下购置计划:第一个月购置 250 册图书,自第二个月起,每月比上一个月多购置 150 册.若该图书馆希望新增图书总量超过 5000 册,则该计划至少需要实施的月数为 ()

- A. 6 B. 7
C. 8 D. 9

4. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 7$,公差为 d ,前 n 项和为 S_n ,当且仅当 $n = 8$ 时 S_n 取得最大值,则 d 的取值范围为_____.

5. [2025 · 北京北师大附中测试] 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} - a_n = 2n - 15 (n \in \mathbf{N}^*)$, $a_1 = 1$,则 $a_3 =$ _____;当 $n =$ _____ 时, a_n 取得最小值.

变式 (1)[2025 · 北京北师大附中测试] 《孙子算经》是我国古代的数学名著,书中有如下问题:“今有五等诸侯,共分橘子六十颗,人别加三颗.问:五人各得几何?”其意思为:有依次为第一等、第二等、第三等、第四等、第五等的 5 个诸侯分 60 个橘子,他们分得的橘子个数成公差为 3 的等差数列,问 5 人各得多少橘子.根据这个问题,可以得到第二等诸侯分得的橘子个数是_____.